UNA ALTERNATIVA PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS FÓRMULAS DE SUMA

Maximiliano de las Fuentes Lara, Olga Gonzales Zavala, Carlos Valdez González
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Baja California

Resumen

En los cursos de cálculo integral se estudia entre otros temas, el área de una región plana; el tratamiento inicial regularmente incluye la incorporación de las fórmulas de suma por lo que el trabajo en este aspecto se ve limitado ya que por una parte, debe dedicarse tiempo a explicar la notación y simbología involurada, y por otra, calcular algunas de las sumas que son necesarias para el cálculo de áreas. Estas fórmulas son dadas en los textos de cálculo y se asume en los cursos que son verdaderas o pueden ser verificadas numéricamente, o bien demostradas por procedimientos analíticos. El presente documento describe un algoritmo para la determinación precisamente de las fórmulas de suma mediante la consideración de diferencias y el planteamiento de un modelo matricial y su consecuente resolución. La comprobación del modelo matricial se realiza con un programa de calculadora implementado en la TI-92.

Introducción

En el cálculo integral las fórmulas de suma están vinculadas a la Suma de Riemann, el cálculo de áreas de regiones planas, cálculo de volúmenes, en general aquellos cálculos que involucren el concepto de integral definida. También estas fórmulas son estudiadas en temas de matemáticas como son series y sucesiones. En particular estamos interesados en su determinación, y el mecanismo considerado para tal efecto son diferencias y sistemas de ecuaciones lineales. Cabe señalar que el modelo matricial propuesto para la determinación de fórmulas de suma no ha sido ubicado desde nuestra perspectiva en libros de texto de matemáticas, razón por la cual consideramos pertinente desarrollarlo, sentimos que tal contribución favorecerá a una comprensión más significativa respecto del tratamiento y utilización de las fórmulas de suma.

Hemos asumido que las fórmulas de suma pueden ser tratadas como funciones polinómicas $S(n)$, en donde n es la variable independiente y pertenece a los números enteros positivos. S denota la variable dependiente, así: $\sum_{i=1}^{n} i^k = S(n)$. A continuación presentamos el desarrollo propuesto para lograr el acceso al modelo matricial, además de la verificación del modelo mediante un programa de calculadora.

Desarrollo

Consideremos el caso particular para la fórmula $\sum_{i=1}^{n} i$ y asignemos valores de n a partir de n = 1 hasta n = 10.

El problema para calcular la suma sobreviene para valores de n muy grandes, lo cual ha contraído la búsqueda de un modelo general para cualquier valor de n. La actividad con la que hemos iniciado aquí es calcular las diferencias de los correspondientes resultados, es decir las diferencias de la suma, obteniendo los números de la tabla siguiente.

n	$S(n)$	Primera diferencia	Segunda diferencia
1	1		
2	3	2	
3	6	3	1
4	10	4	1
5	15	5	1
6	21	6	1
7	28	7	1
8	36	8	1
9	45	9	1
10	55	10	1

Puede notarse que las segundas diferencias son constantes y tienen un valor de 1, dada esta situación, se colige entonces que el conjunto de puntos (n,S(n)) pueden ser representados por una expresión polinomial de segundo grado (cuyo coeficiente de correlación es r = 1). Sabemos que la expresión polinomial general de segundo grado puede escribirse como $S(n) = an^2 + bn + c$, donde los coeficientes a, b, c los suponemos números reales y es necesario determinarlos.

Notemos que

$$S(1) = a + b + c\,,$$
$$S(2) = 4a + 2b + c\,,$$
$$S(3) = 9a + 3b + c\,,$$

por lo que, de acuerdo con la tabla anterior, es necesario resolver el sistema de ecuaciones

$$a + b + c = 1$$
$$4a + 2b + c = 3$$
$$9a + 3b + c = 6\,.$$

Resolviendo el sistema por alguno de los métodos conocidos, obtenemos la expresión

$$S(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

la cual se puede factorizar como

$$S(n) = \tfrac{1}{2}n(n+1)\,.$$

Por otra parte, como $\sum_{i=1}^{n} i^k = S(n)$, entonces se obtiene la conocida fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Consideremos ahora el caso de la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos, que escribimos por medio de la fórmula $\sum_{i=1}^{n} i^2$ y fijemos valores de n a partir de n = 1 hasta n = 10. Realizamos el cálculo de las diferencias y lo indicamos en la tabla siguiente:

n	$S(n)$	Primera diferencia	Segunda diferencia	Tercera diferencia
1	1			
2	5	4		
3	14	9	5	
4	30	16	7	2
5	55	25	9	2
6	91	36	11	2
7	140	49	13	2
8	204	64	15	2
9	285	81	17	2
10	385	100	19	2

Nuevamente observamos las diferencias, en particular, las terceras diferencias, las cuales son todas iguales y con valor de 2. De esta manera, el conjunto de puntos $(n,S(n))$ lo podemos representar mediante una expresión polinomial (cuyo coeficiente de correlación $r = 1$) de tercer grado. Sabemos que la expresión polinomial general de tercer grado puede escribirse como $S(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$, donde suponemos que los coeficientes a, b, c y d son números reales. Procediendo de forma análoga al caso anterior para determinar estos coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
a + b + c + d &= 1\\
8a + 4b + 2c + d &= 5\\
27a + 9b + 3c + d &= 14\\
64a + 16b + 4c + d &= 30\,.
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema y factorizando los términos correspondientes, obtenemos la expresión

$$S(n) = \tfrac{1}{6}n(2n+1)(n+1)\,,$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

La realización de los cálculos anteriores y adicionalmente los de otras sumas de orden superior, han permitido establecer ciertas regularidades respecto del grado del polinomio, el valor de la diferencia, el número de ecuaciones y el número de puntos requeridos para la resolución del sistema correspondiente de ecuaciones lineales. Dicha información se registra en la siguiente tabla:

Fórmula de suma	Número de diferencia de Suma	Valor de la diferencia	Grado del polinomio	Número de ecuaciones	Número de puntos
$\sum_{i=1}^{n} i^0$	1	0!	1	2	2
$\sum_{i=1}^{n} i^1$	2	1!	2	3	3
$\sum_{i=1}^{n} i^2$	3	2!	3	4	4
$\sum_{i=1}^{n} i^3$	4	3!	4	5	5
$\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}$	k	$(k-1)!$	k	$k+1$	$k+1$
$\sum_{i=1}^{n} i^k$	$k+1$	$k!$	$k+1$	$k+2$	$k+2$

A su vez, estas regularidades y el hecho de que el último término independiente se hace cero en todos los casos, permite una reducción de dos ecuaciones en todos y cada uno de los casos si hacemos el planteamiento de la función polinomial general en forma

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = S(n),$$

donde

$$S(n) = \frac{n^{k+1}}{k+1} + a_k \frac{n^k}{k!} + a_{k-1} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} + a_{k-2} \frac{n^{k-2}}{(k-2)!} + \cdots + a_1 n$$

La resolución final estriba en la determinación de los coeficientes a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, $a_{k-3}, \ldots, a_1$, mediante la resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k-1)!} & \frac{1}{(k-2)!} & \frac{1}{(k-3)!} & \cdots & 1 \\ \frac{2^k}{k!} & \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{2^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{2^{k-3}}{(k-3)!} & \cdots & 2 \\ \frac{3^k}{k!} & \frac{3^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{3^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{3^{k-3}}{(k-3)!} & \cdots & 3 \\ \frac{4^k}{k!} & \frac{4^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{4^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{4^{k-3}}{(k-3)!} & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{k^k}{k!} & \frac{k^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{k^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{k^{k-3}}{(k-3)!} & \cdots & k \end{bmatrix} \text{x} \begin{vmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ a_{k-3} \\ \vdots \\ a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k}{k+1} \\ \sum_{i=1}^{2} i^k - \frac{2^{k+1}}{k+1} \\ \sum_{i=1}^{3} i^k - \frac{3^{k+1}}{k+1} \\ \sum_{i=1}^{4} i^k - \frac{4^{k+1}}{k+1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} i^k - \frac{k^{k+1}}{k+1} \end{vmatrix}$$

Ahora probemos nuestro mecanismo para la fórmula $\sum_{i=1}^{n} i^2$. En este caso, k = 2, la epresión polinomial es $S(n) = \frac{n^3}{3} + a_2 \frac{n^2}{2!} + a_1 n$ y el sistema de ecuaciones por resolver es

$$\frac{1}{2}a_2 + a_1 = \frac{2}{3}$$
$$2a_2 + 2a_1 = \frac{7}{3},$$

cuya solución es $a_2 = 1$ y $a_1 = 6$, de tal suerte que el polinomio que se obtiene es

$$S(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

el cual puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) .$$

Puede notarse que en la matriz general que se propone, aparece de manera reiterativa el término $\sum_{i=1}^{k} i^k$ para valores distintos de k. Para mayor facilidad de visualización en las distintas propuestas que se hacen, una tabla con esta información se exhibe a continuación:

n	$\sum_{i=1}^{n} i^1$	$\sum_{i=1}^{n} i^2$	$\sum_{i=1}^{n} i^3$	$\sum_{i=1}^{n} i^4$	$\sum_{i=1}^{n} i^5$	$\sum_{i=1}^{n} i^6$	$\sum_{i=1}^{n} i^7$	$\sum_{i=1}^{n} i^8$	$\sum_{i=1}^{n} i^9$	$\sum_{i=1}^{n} i^{10}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	5	9	17	33	65	129	257	513	1025
3	6	14	36	98	276	794	2316	6818	20196	60074
4	10	30	100	354	1300	4890	18700	72354	282340	1108650
5	15	55	225	979	4425	20515	96825	462979	2235465	10874275
6	21	91	441	2275	12201	67171	376761	2142595	12313161	71340451
7	28	140	784	4676	29008	184820	1200304	7907396	52666768	353815700
8	36	204	1296	8772	61776	446964	3297456	24684612	186884496	1427557524
9	45	285	2025	15333	120825	978405	8080425	67731333	574304985	4914341925
10	55	385	3025	25333	220825	1978405	18080425	167731333	1574304985	1.4914E+10
11	66	506	4356	39974	381876	3749966	37567596	382090214	3932252676	4.0852E+10
12	78	650	6084	60710	630708	6735950	73399404	812071910	9092033028	1.0277E+11
13	91	819	8281	89271	1002001	11562759	136147921	1627802631	1.9697E+10	2.4063E+11
14	105	1015	11025	127687	1539825	19092295	241561425	3103591687	4.0358E+10	5.2988E+11
15	120	1240	14400	178312	2299200	30482920	412420800	5666482312	7.8801E+10	1.1065E+12

Ahora probemos la estrategia propuesta para determinar la fórmula para $\sum_{i=1}^{n} i^5$. Como k = 5, tenemos que la función polinomial es

$$S(n) = \frac{n^6}{6} + a_5 \frac{n^5}{5!} + a_4 \frac{n^4}{4!} + a_3 \frac{n^3}{3!} + a_2 \frac{n^2}{2!} + a_1 n .$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5!}a_5+\frac{1}{4!}a_4+\frac{1}{3!}a_3+\frac{1}{2}a_2+a_1&=\frac{5}{6}\\
\frac{32}{5!}a_5+\frac{16}{4!}a_4+\frac{8}{3!}a_3+2a_2+2a_1&=33-\frac{64}{6}\\
\frac{243}{5!}a_5+\frac{81}{4!}a_4+\frac{27}{3!}a_3+\frac{27}{2!}a_2+3a_1&=276-\frac{729}{6}\\
\frac{1024}{5!}a_5+\frac{256}{4!}a_4+\frac{64}{3!}a_3+8a_2+4a_1&=1300-\frac{4096}{6}\\
\frac{3125}{5!}a_5+\frac{625}{4!}a_4+\frac{125}{3!}a_3+\frac{25}{2}a_2+5a_1&=4425-\frac{15625}{6},
\end{aligned}$$

por lo que al resolverlo obtenemos las soluciones $a_5=60$, $a_4=10$, $a_3=0$, $a_2=-\frac{1}{6}$ y $a_1=0$. Luego el polinomio es

$$S(n)=\frac{n^6}{6}+60\frac{n^5}{5!}+10\frac{n^4}{4!}+0\frac{n^3}{3!}-\frac{1}{6}\frac{n^2}{2!}+0n,$$

el cual puede reducirse a la expresión

$$S(n)=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2.$$

Factorizando tenemos que

$$S(n)=\frac{1}{12}n^2(2n^4+6n^3+5n^2-1)$$

Por división sintética, no es muy difícil encontrar que

$$2n^4+6n^3+5n^2-1=(n+1)^2(2n^2+2n-1),$$

por lo que finalmente

$$\sum_{i=1}^{n} i^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

Una manera más rápida de probar el modelo matricial propuesto es mediante el apoyo de la calculadora graficadora simbólica y programable. Para ilustrar esto, hemos elaborado un programa (el cual se anexa) que permite visualizar la matriz de coeficientes (figura 1) y el vector columna (figura 2) de manera inmediata, una vez que se ha incorporado el exponente de la suma; posteriormente proporciona y factoriza el polinomio resultante (figuras 3 y 4). Como ejemplo consideramos la fórmula $\sum_{i=1}^{n} i^5$:

```
()
Prgm
@ESTE PROGRAMA ES PARA GENERAR LAS
FÓRMULAS DE SUMA
DelVar tata,n,vecol,matecof:ClrIO
Output 20,30,"PROGRAMA PARA  DETERMINAR"
Output 30,30,"FÓRMULAS DE SUMA DE"
Pause:setMode("Angle","RADIAN")
setMode("Exact/Approx","EXACT"):Lbl maxi
Dialog:Title "FÓRMULA DE SUMA"
Request "EXP DE LA SUMA k",es
EndDlog:expr(es)→es:ClrIO
newMat(es,es)→matecof:newMat(es,1)→vecol
For i,1,es:For j,1,es
i^(es-(j-1))/((es-(j-1))!)→matecof[i,j]:EndFor
EndFor:ClrIO:Disp "MATRIZ DE COEFICIENTES"
Disp "":Disp matecof:Pause:For i,1,es
For j,1,1:∑(i^es,i,1,i)-i^(es+1)/(es+1)→vecol[i,j]
EndFor:EndFor
ClrIO:Disp "VECTOR COLUMNA":Disp
Disp vecol:Pause:simult(matecof,vecol)→rese
Define chocol(n)=0:For i,1,es:rese[i,1]→oto(i)
EndFor:n^(es+1)/(es+1)→tata:For i,1,es
tata+oto(i)∗n^(es-(i-1))/((es-(i-1))!)→tata
EndFor:tata→s(n):ClrIO
Disp "POLINOMIO RESULTANTE"
Disp "exponente k =":Output 12,80,es
Disp "":Disp [["s(n)=",s(n)]]:Pause:ClrIO
Disp "":Disp "POLINOMIO FACTORIZADO"
Disp "":factor(s(n),n)→ss(n):Disp ss(n)
Pause:clrio:Dialog
Title "FINALIZACIÓN DEL PROGRAMA"
Request "REINICIAR SI o NO",str2
EndDlog:If str2="si" Then:Goto maxi:EndIf
ClrIO:Output 40,55,"FIN DEL PROGRAMA":EndPrgm
```

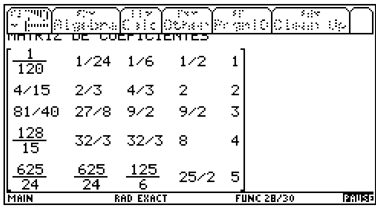


Figura 1

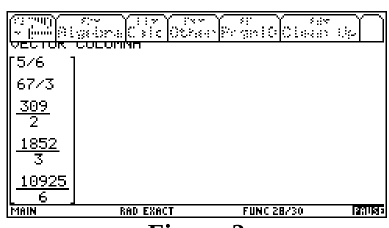


Figura 2

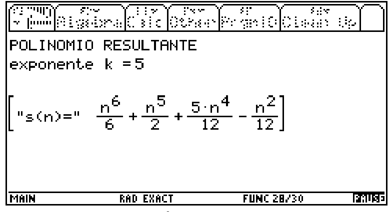


Figura 3

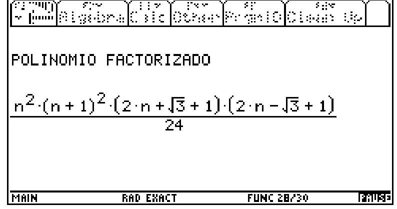


Figura 4

Conclusiones

Hemos pretendido plantear el procedimiento y el modelo matricial de la manera más completa y explícita posible, sin embargo detrás de esta síntesis existe una cantidad significativa de planteamientos y cálculos que por espacio no es posible mostrar. Aunque el procedimiento exhibido pudiera no tener un carácter formal (matemáticamente hablando), creemos que si se trata de un procedimiento aplicable para la determinación de las fórmulas de suma, el cual no requiere del conocimiento de la fórmula anterior, como ocurre con el modelo algebraico.

Bibliografía

TI-92 *Manual del usuario*, Texas Instruments 1996
TI-89/Voyage™ 200 *Referencia técnica*, Texas Instruments 2002
Purcell,Varberg, Rigdon, *Cálculo*, Octava Edición, Prentice Hall, 2001.